Cours de mathématiques

Terminale S1

Chapitre 9 : Nombres complexes

Année scolaire 2008-2009
mise à jour 15 février 2009

FIG. 1 – Gerolamo Cardano

Médecin et mathématicien italien qui ne redoutait pas les échecs

Table des matières

Informations sur la mise en page

Le document s'inspire des nombreux livres de Terminale S des différentes éditions. Les figures de ce document ont été réalisées avec métapost et les macros de J-M Sarlat. L'environnement bclogo, utilisé pour la réalisation de ce document, est téléchargeable ici : `http://melusine.eu.org/syracuse/wiki/doku.php/mc/bclogo`

I Chapitre 9 : Nombres complexes

I.A Introduction

Rappels et découverte

Pour tout réel k, il existe un unique nombre réel dont le cube est k.
Ce nombre est appelé racine cubique de k . Il est noté $\sqrt[3]{k}$ ou aussi $k^{\frac{1}{3}}$.
On a par exemple $\sqrt[3]{8} = 2$ parce que $2^3 = 8$.
Au XVIème siècle, *Jérôme Cardan*, confronté à la résolution des équations du troisième degré, de la forme $x^3 = px + q$ donne la formule suivante appelée formule de **CARDAN** : lorsque $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$, l'équation a pour solution

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

1. On considère l'équation $x^3 = 1$. Quelles sont les valeurs de p et q ?
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
   Quelle solution obtient-on ?
2. On considère l'équation $x^3 = 3x + 2$.
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
   Quelle solution obtient-on ?
   Vérifier et trouver toutes les solutions de l'équation $x^3 = 3x + 2$.
3. On considère l'équation $x^3 = 15x + 4$.
   Vérifier que l'on peut utiliser la formule de Cardan.
4. On considère l'équation $x^3 = 2x + 4$.
   Justifier que la formule de Cardan ne peut pas s'appliquer.
   Pris dans un engrenage infernal, on décide cependant d'appliquer la formule.
   Comment peut s'écrire la *solution* ?
5. Imaginons un nombre dont le carré est -1, et qui sera très temporairement noté $\sqrt{-1}$.
   En utilisant ce nombre *imaginaire* et en effectuant des calculs "habituels", montrer que
   $$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$
   En déduire que $2 + \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 + \sqrt{-121}$.
   "Démontrer" de même que $2 - \sqrt{-1}$ est une racine cubique de $2 - \sqrt{-121}$.
   Montrer alors que la formule de Cardan appliquée à l'équation $x^3 = 15x + 4$ donne comme solution le réel 4.
   Vérifier que 4 est effectivement solution de l'équation.
   On a donc, en utilisant des nombres *imaginaires*, obtenu un résultat bien réel.
6. Si a et b sont deux réels strictement positifs, alors : $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.
   Si vous appliquez cette propriété à $a = b = -1$, qu'obtenez-vous ?
   C'est la raison pour la quelle on n'utilisera plus jamais la notation $\sqrt{-1}$, mais i, nombre imaginaie dont le carré $i^2 = -1$.
   Il aura fallu attendre près de 150 ans pour prendre cette notation dûe à ***Euler***, que vous avez déjà vu .

Les différents ensembles de nombres

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels. C'est l'ensemble des entiers positifs ou nuls.
- Dans $\mathbb{N}$ l'équation $x+1=0$ n'a pas de solution.
  Cette équation a une solution notée -1 , cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Z}$.
  $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. C'est l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls.
  $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
- Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2x=1$ n'a pas de solution.
  Cette équation a une solution notée $-\dfrac{1}{2}$, cette solution est un élément de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
  $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.
  C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme $\dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}^*$. $\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.
- Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2=2$ n'a pas de solutions.
  Cette équation a deux solutions notées $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$.
  $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble des abscisses de tous les points d'une droite.
  $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=-1$ n'a pas de solutions.
  Cette équation a deux solutions notées i et $-i$, ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.
  C'est l'ensemble des nombres de la forme $a+bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
  $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I.B Définitions

I.B.1 Forme algébrique

Définition 1:

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2=-1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique $z=x+iy$ avec x et y réels.
  L'écriture $z=x+iy$ avec x et y réels est appelée forme algébrique du nombre complexe z.
  x est la partie réelle de z, notée $Re(z)$, y est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

Remarque : $z=x+iy$ avec x et y réels :
Si $y=0$, le nombre complexe est réel.
Si $x=0$, le nombre complexe est dit imaginaire pur.

THÉORÈME 1

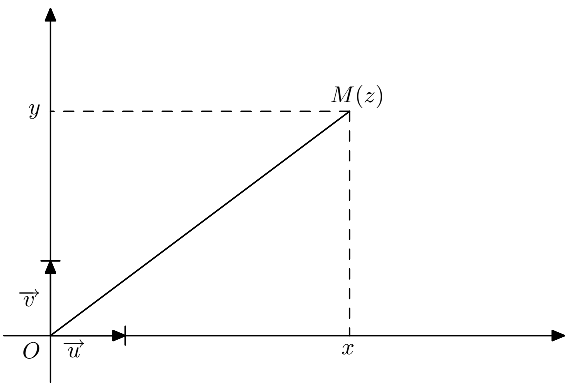
Soit x, y, x' et y' des nombres réels,
$x + iy = x' + iy'$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
$x + iy = 0$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

Cela signifie qu'un nombre complexe s'écrit de manière unique sous forme algèbrique.

I.B.2 Représentation graphique

$(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal direct du plan.

1. A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réel, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$. On dit que M est le point image de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
2. Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
3. Le plan est alors appelé plan complexe.
4. L'axe des abscisses $(O; \overrightarrow{u})$ est appelé **axe des réels**, l'axe des ordonnées $(O; \overrightarrow{v})$ est appelé axe des **imaginaires purs**.



I.C Opérations sur les nombres complexes

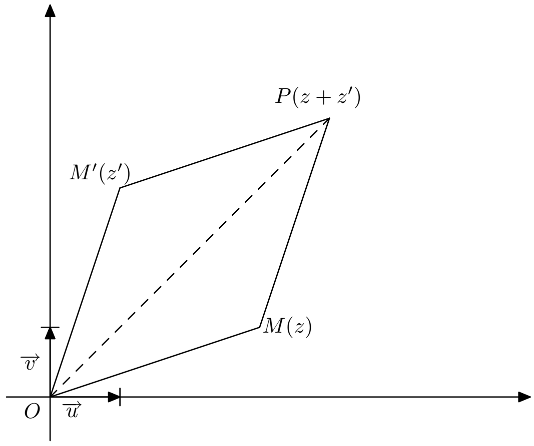
I.C.1 Addition et multiplication

Définition 2:

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' réels).
La somme de z et de z' est le complexe $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
Le produit de z et de z' est $z.z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.
En effet $z.z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

Remarque : Les identités remarquables sont valables dans $\mathbb{C}$. On a alors pour tous z et z' complexes,
$z^2 + z'^2 = z^2 - i^2z'^2 = (z - iz')(z + iz')$.

Remarque : Soient M d'affixe z et M' d'affixe z' des points du plan complexe.
$z + z'$ est l'affixe du point P tel que $OMPM'$ est un parallélogramme.



Affixe d'un vecteur, d'un barycentre

Proposition 1:
Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B.
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Remarque : Si λ est un réel, l'affixe de vecteur $\lambda\vec{u}$ est λz où z est l'affixe de $\vec{u}$.

Proposition 2: Interprétation barycentrique
Deux points A et B du plan complexe ont pour affixes respectives z_A et z_B.
L'affixe du barycentre G des points pondérés (A, α) et (B, β) $(\alpha+\beta \neq 0)$ est : $\dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$.

dem : On a $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB})$ et le résultat en découle en passant aux affixes.

On peut généraliser cette propriété :
(A_1, α_1), (A_2, α_2), ..., (A_n, α_n) sont n points du plan, d'affixes respectives z_1, z_2, ..., z_n tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$. Alors leur barycentre G a pour affixe la moyenne pondérée de leurs affixes : $z_G = \dfrac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$.
Il en résulte que l'affixe z_I du milieu I du segment $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$ et celle du centre de gravité G d'un triangle MNP est $z_G = \dfrac{z_M + z_N + z_P}{3}$.

I.C.2 Inverse d'un nombre complexe non nul

Théorème 2
Tout nombre complexe non nul z, écrit sous forme algébrique $z = x+iy$, admet un inverse, noté $\dfrac{1}{z}$, et : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

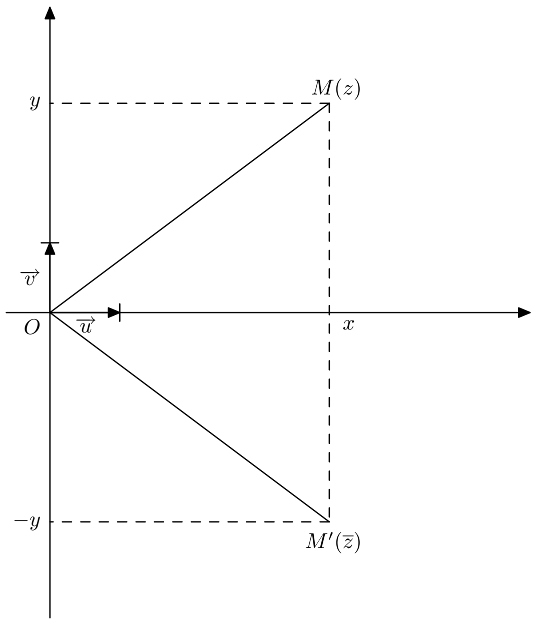
En effet, on remarque que pour tout nombre complexe non nul $z = x + iy$, $(x + iy)(x - iy) =$

$x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.
On a alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.

I.C.3 Nombre conjugué

Définition 3:
Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$.
Le **nombre conjugué** de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe $x - iy$.

Dans le plan complexe, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est l'image du point M d'affixe z



par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition 3:
z est un nombre complexe.

1. z est réel équivaut à $\bar{z} = z$.
2. z est imaginaire pur équivaut à $\bar{z} = -z$.

dem : On pose $z = x + iy$, avec x et y réels :

1. Si z est réel, alors $y = 0$, donc $z = \bar{z}$.
   Si $z = \bar{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $2iy = 0$ et on en déduit que $y = 0$ ce qui signifie que z est réel.
2. Si z est imaginaire pur, alors $x = 0$, donc $z = -\bar{z}$.
   Si $z = -\bar{z}$, alors $x + iy = -x + iy$, donc $2x = 0$ et $x = 0$. z est donc bien un imaginaire pur.

Proposition 4:

Soit z l'affixe d'un point M dans le plan complexe.

1. $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.
2. $-z$ est l'affixe du symétrique de M par rapport au point O.
3. $-\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées.

Proposition 5:

Pour tous nombres complexes z et z' :

(1) $\overline{z+z'} = \bar{z} + \overline{z'}$

(2) $\overline{\overline{z}} = z$

(3) $\overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$

(4) pour $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

(5) pour $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

(6) pour $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

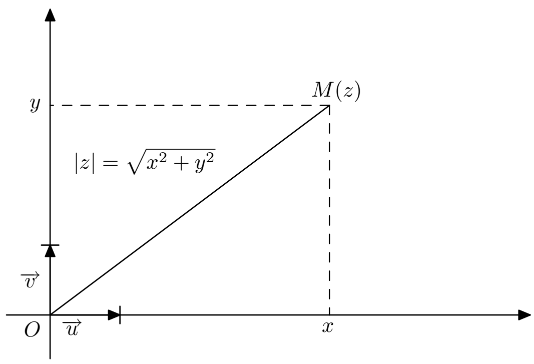
Remarque : Pour tout nombre complexe z, on a les relations $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$.

I.C.4 Module d'un nombre complexe

Définition 4:

z est un nombre complexe, $z = x + iy$ (x et y réels). Le module de z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Interprétation géométrique : Dans le plan complexe, si M a pour affixe z, alors $OM = |z|$.



Remarques :

1. Si z est un nombre réel, le module de z correspond à la valeur absolue de z.
2. $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$ car $OM = 0$ équivaut à $O = M$.
3. $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Propriétés du module

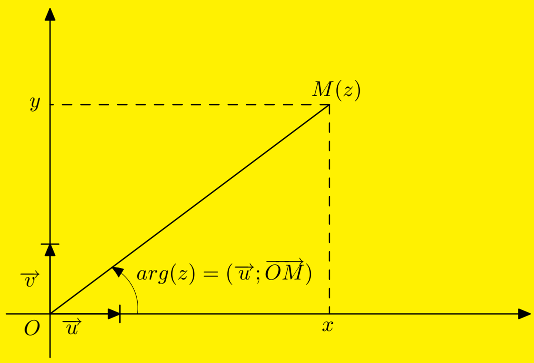
Pour tous nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$:

1. $|\overline{z}| = |z|$
2. $|-z| = |z|$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
4. $|zz'| = |z||z'|$
5. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
6. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$ ($z \neq 0$ si $n \in -\mathbb{N}$)

I.D Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 5:

z est un nombre complexe non nul d'image M, $z = x + iy$ (x et y réels). Une mesure de l'argument de z est un nombre réel noté $arg(z)$ et défini par $arg(z) = (\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{OM})$.



Propriétés de l'argument

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$:

1. $arg(\overline{z}) = -arg(z)$
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi$
3. $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
4. $arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$
5. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $arg(z^n) = n \times arg(z)$

Démonstration : On pourra écrire les formes trigonométriques de z et z' pour démontrer certaines de ces propriétés.(voir exercice fait en cours, et exercice ROC)

I.E Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 6: -Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$, de module ρ et d'argument de mesure θ, on pourra écrire :

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Proposition 6:

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $arg(e^{i\theta}) = \theta$
3. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
4. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
5. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
6. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$

I.F Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations du second degré à coefficients réels

Proposition 7:

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet des solutions dans $\mathbb{C}$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

1. Si $\Delta = 0$: une solution réelle égale à $-\dfrac{b}{2a}$
2. Si $\Delta \neq 0$: deux solutions distinctes :
   - réelles si $\Delta > 0$: $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;
   - complexes conjuguées si $\Delta < 0$: $\dfrac{-b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Démonstration : La forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) est $a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les résultats vus en première.
Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. On pose $\delta = -\Delta$. On peut écrire $\delta = (\sqrt{\delta})^2$
On a alors : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right]$
$az^2 + bz + c = a\left(z + \dfrac{b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)\left(z + \dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)$.
Les solutions de l'équation sont donc $-\dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et
$-\dfrac{b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a} = -\dfrac{b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

I.G Interprétation géométrique

PROPOSITION 8:

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes respectives a, b et c.
Si on note $Z = \dfrac{c-a}{b-a}$ alors $arg(Z) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et $|Z| = \dfrac{AC}{AB}$.

Il est en effet évident que le module d'un quotient est égal au quotient des modules et $|c-a| = AC$ et $|b-a| = AB$.
De même, l'argument d'un quotient est égal à la différence des arguments et on peut remarquer que :

$$arg(c-a) - arg(b-a) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AB})$$

donc

$$arg(\frac{c-a}{b-a}) = (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{u})$$

d'où

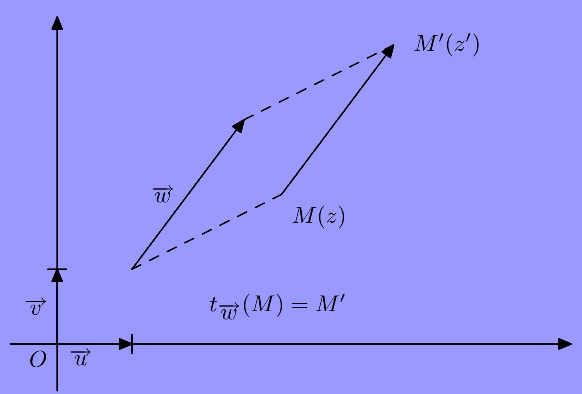
$$arg(\frac{c-a}{b-a}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$$

I.H Nombres complexes et transformations

I.H.1 Ecriture complexe d'une translation

PROPOSITION 9:

$\overrightarrow{w}$ est un vecteur d'affixe b.
L'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' = z + b$.

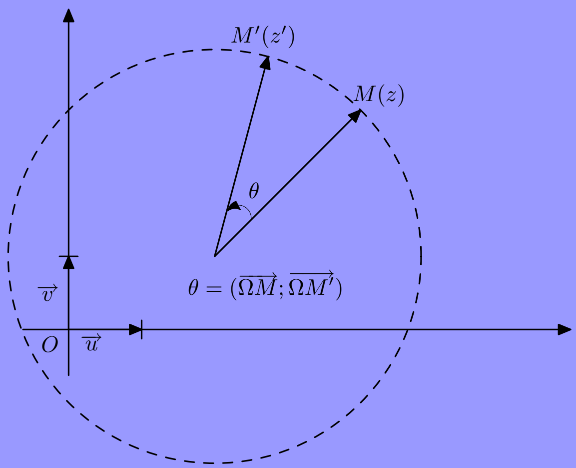


dem : t est la translation de vecteur $\overrightarrow{w}$; $M' = t(M)$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$, c'est à dire $z' - z = b$ où z et z' sont les affixes respectives de M et M'.

I.H.2 Ecriture complexe d'une rotation

PROPOSITION 10:

Ω est un point d'affixe ω et θ un réel. L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

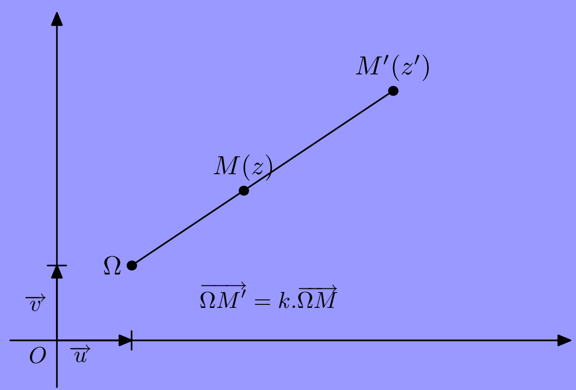


R est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ ; $M' = R(M)$ équivaut à $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ et $\Omega M' = \Omega M$.
On note z et z' les affixes respectives de M et M', l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ est $z' - \omega$, celle de $\overrightarrow{\Omega M}$ est $(z - \omega)$.
Donc $M' = R(M)$ équivaut à $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

I.H.3 Ecriture complexe d'une homothétie

PROPOSITION 11:

Ω est un point d'affixe ω et k un réel non nul. L'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω et de rapport k, qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ est $z' - \omega = k(z - \omega)$.



h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k ; $M' = h(M)$ équivaut à $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.
On note z et z' les affixes respectives de M et M', l'affixe de $\overrightarrow{\Omega M'}$ est $z' - \omega$, celle de $k\overrightarrow{\Omega M}$ est $k(z - \omega)$. Donc $M' = h(M)$ équivaut à $z' - \omega = k(z - \omega)$.