

Un peu de chaos

1 Modèle logistique et chaos

On définit la fonction suivante.

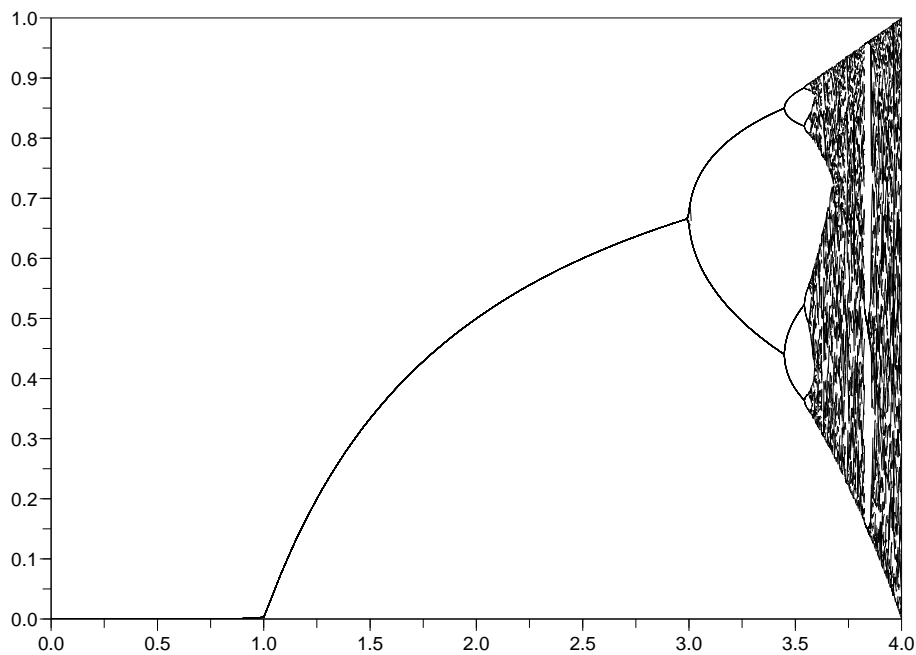
$$f_r : \begin{pmatrix} [0, 1] & \longrightarrow & [0, 1] \\ x & \longmapsto & f_r(x) = rx(1-x) \end{pmatrix}$$

On considère le système dynamique $S_r(n)$ qui consiste à itérer cette fonction : pour $u_0 \in [0, 1]$, on pose $S_r(n)(u_0) = f_r^n(u_0)$. Une trajectoire de ce système est donc une suite $S_r(n)(u_0)$ définie par récurrence par $S_r(n+1)(u_0) = f_r(S_r(n)(u_0))$.

Il s'agit d'un modèle intéressant pour la biologie mathématique. En effet, c'est le modèle le plus simple pour l'évolution d'une population animale dont $S_r(n)(u_0)$ représente la densité après n années (ou autres unités de temps). La fonction f_r est choisie car elle répond aux principes suivants : si $S_r(n)(u_0)$ est trop petit, $S_r(n+1)(u_0)$ sera petit (petite densité de reproducteurs), si $S_r(n)(u_0)$ est trop grand (proche de 1), alors $S_r(n+1)(u_0)$ sera aussi petit (trop grande concurrence, surexploitation du milieu etc.). Le but est de comprendre la dynamique de ce modèle. Par exemple, on peut chercher à savoir si, pour un certain r donné, $S_r(n)(u_0)$ tend toujours vers 0, c'est-à-dire que l'espèce animale finit toujours par s'éteindre.

- 1) Montrer que pour $r \in [0, 4]$, $S_r(n)$ est toujours bien défini de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.
- 2) On suppose que $r \in [0, 1]$. A l'aide d'un programme Scilab, étudier le comportement de $S_r(n)$ sur différentes données initiales. L'espèce animale survit-elle ? Prouver mathématiquement le comportement observé.
- 3) On suppose que $r \in [1, 3]$. Étudier le comportement de $S_r(n)$ numériquement. Expliquer mathématiquement du mieux possible le comportement observé.
- 4) Écrire un programme Scilab qui trace en fonction de $r \in [0, 4]$ les points de $[0, 1]$ qui sont

dans l'adhérence de trajectoires du système $S_r(n)$ (indication : à r fixé, on peut regarder la valeur de $S_r(n)(u_0)$ pour n grand et pour un grand nombre de données initiales u_0 tirées au hasard et tracer l'ensemble des points obtenus). Commenter le graphique obtenu qui devrait ressembler au graphique suivant.



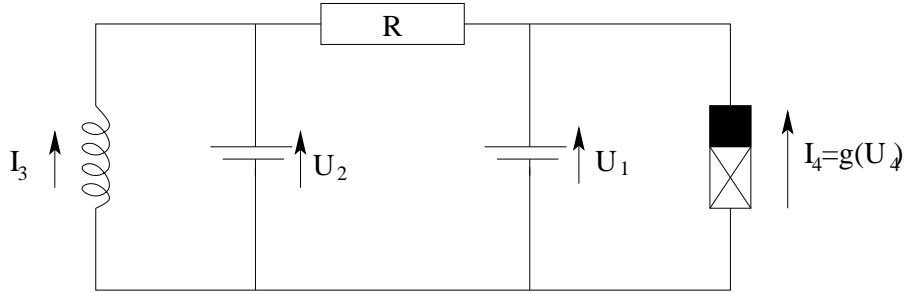
5) Mettre en évidence un r pour lequel toute trajectoire tend vers une orbite périodique de période 2.

6) Mettre en évidence un r pour lequel $S_r(n)$ a un comportement proche du chaos, c'est-à-dire que la trajectoire $S_r(n)(u_0)$ dépend très fortement de la donnée u_0 (une petite erreur sur u_0 change complètement le comportement de la trajectoire).

2 Oscillateur de Chua

2.1 Le montage électronique et sa modélisation mathématique

Le circuit de Chua a été inventé par Chua en 1983. Son but est d'exhiber du chaos dans un montage électronique.



Le composant de droite est une diode de Chua qui a une réponse non-linéaire du type $I = f(U)$. Cette diode est en fait un montage de résistances et de deux amplificateurs opérationnels. La fonction f est affine par morceaux et cette non-linéarité provient de la saturation des amplificateurs pour des tensions trop grandes. On rappelle que les comportements électroniques d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine sont respectivement $U = RI$, $I = C \frac{dU}{dt}$ et $U = L \frac{dI}{dt}$. On trouve donc

$$\begin{cases} C_1 \frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{R}(U_2 - U_1) - g(U_1) \\ C_2 \frac{dU_2}{dt} = \frac{1}{R}(U_1 - U_2) + I_3 \\ L_3 \frac{dI_3}{dt} = -U_2 \end{cases}$$

La résistance R est variable et sert de paramètre dans l'expérience. Après adimensionnement des équations et choix de certaines valeurs, on se ramène à l'équation différentielle suivante dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(y(t) - x(t) - f(x(t))) \\ y'(t) = x(t) - y(t) + z(t) \\ z'(t) = -30y(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $f(x) = -\frac{1}{2}x - (|x + 1| - |x - 1|)$. Le paramètre α est un réel strictement positif que l'on fait varier pour observer différents comportements.

2.2 Bifurcations dans l'oscillateur de Chua

Pour tout α , le système (1) possède exactement trois équilibres $(0, 0, 0)$ et $(\pm 4, 0, \mp 4)$. Les linéarisations de (1) autour de $(0, 0, 0)$ et des équilibres externes sont de la forme $X' = AX$ avec A donné respectivement par

$$A_0 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -30 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -30 & 0 \end{pmatrix}.$$

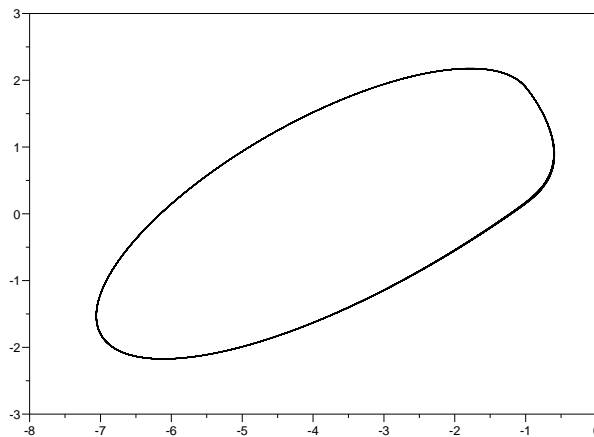
L'équilibre $(0, 0, 0)$ est toujours instable car A_0 possède une valeur propre réelle positive. Pour des petites valeurs de α , les deux équilibres externes sont stables car toutes les valeurs propres de A_e sont de partie réelle strictement négative. Deux valeurs propres de A_e sont de la forme $a(\alpha) \pm ib(\alpha)$ avec $b(\alpha) > 0$. Quand α augmente, les équilibres externes deviennent instables car $a(\alpha)$ devient positif pour $\alpha \geq \alpha_h$. Ce type de bifurcation est appelé bifurcation de Hopf. On peut alors montrer que pour tout $\alpha > \alpha_h$ assez petit, il existe une orbite périodique stable proche de chacun des équilibres $(\pm 4, 0, \mp 4)$.

Quand α augmente, les deux orbites périodiques s'éloignent des équilibres. Puis se produit une nouvelle bifurcation de type doublement de période, c'est-à-dire que les orbites périodiques se déplient en deux nouvelles orbites périodiques de période double. Se succèdent alors une série de doublements de période conduisant à du chaos. On retrouve dans ce régime un chaos similaire à celui engendré par le modèle logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ avec $x_0 \in [0, 1]$ et $a \in [0, 4]$.

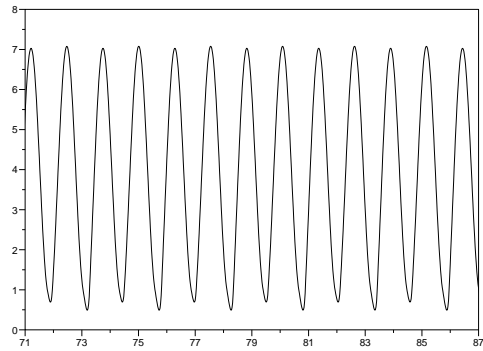
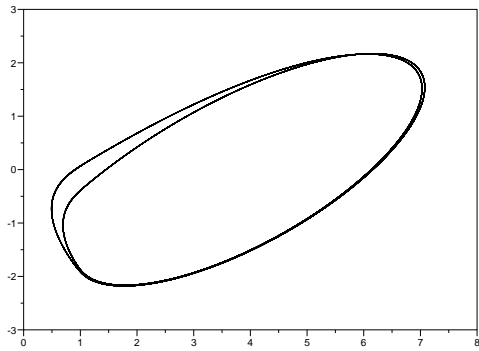
Pour α assez grand, on observe finalement un chaos de type attracteur de Lorenz. Dans ce régime, les trajectoires typiques sautent d'un voisinage d'une orbite périodique au voisinage de l'autre orbite périodique. Le chaos provient du fait que le temps séparant deux sauts est extrêmement sensible aux données initiales.

2.3 Simulations numériques

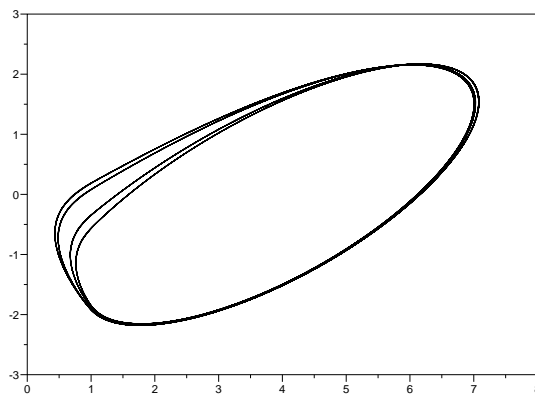
Afin d'observer le comportement asymptotique typique d'une solution de (1), on simule numériquement le système et on affiche la trajectoire uniquement pour des temps très grands. Les figures ci-dessous montrent les trajectoires dans le plan (x, y) ou (x, t) .



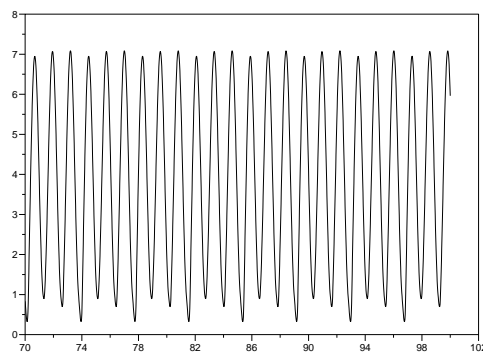
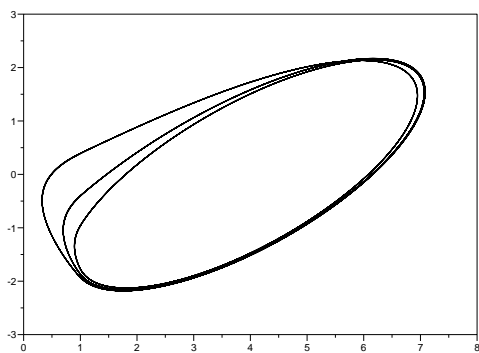
Une des deux orbites périodiques pour $\alpha = 10, 181$



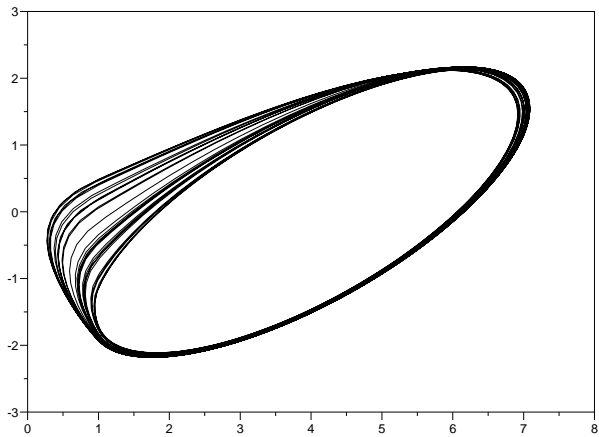
Le doublement de période pour $\alpha = 10, 209$



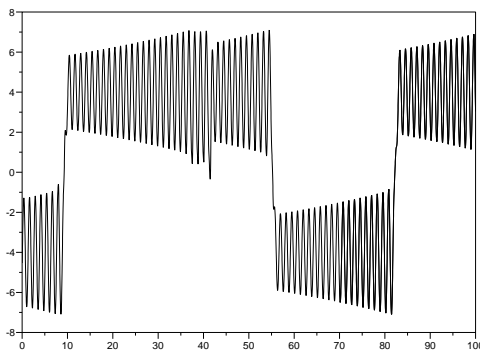
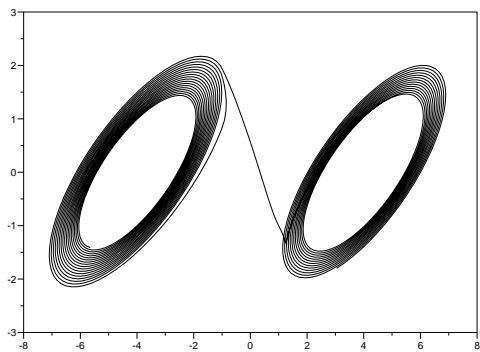
Le doublement de période suivant pour $\alpha = 10, 231$



Une orbite de périodique triple de celle initiale pour $\alpha = 10, 26$



Le chaos de type logistique pour $\alpha = 10,272$



Le chaos de type Lorenz pour $\alpha = 10,46$

3 Théorème de Sarkovskii

On considère le système dynamique sur $[0, 1]$ engendré par l'itération d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$. On introduit l'ordre de Sarkovskii sur les entiers

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5 \triangleleft 2 \times 7 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \times 3 \triangleleft 2^2 \times 5 \triangleleft 2^2 \times 7 \triangleleft \dots \\ \dots \triangleleft 2^3 \times 3 \triangleleft 2^3 \times 5 \triangleleft 2^3 \times 7 \triangleleft \dots \triangleleft 16 \triangleleft 8 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 1$$

On est intéressé par les points périodiques de f . On dit que x est un point périodique de f de période (minimale) $n \geq 1$ si $f^n(x) = x$ et pour tout $1 \leq k \leq n - 1$, $f^k(x) \neq x$.

Théorème 3.1. Sarkovskii (1964)

Si f admet un point périodique de période $n \in \mathbb{N}$ alors pour tout $k \triangleright n$, f admet un point périodique de période k .

On peut facilement démontrer une version plus faible du théorème.

Proposition 3.1. *Si f admet un point périodique de période 3 alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f admet un point périodique de période k .*

Démonstration : Affirmations (preuves laissées au lecteur) :

- 1) si I est un intervalle fermé non vide tel que $I \subset f(I)$ alors f a un point fixe dans I .
- 2) si I et J sont des intervalles fermés non vides tels que $J \subset f(I)$ alors il existe un intervalle fermé non vide $K \subset I$ tel que $J = f(K)$.

On suppose qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) = b$, $f(b) = c$ et $f(c) = a$. Par valeurs intermédiaires, on a $[b, c] \subset f([a, b])$ et $[a, c] \subset f([b, c])$. Tout d'abord, $[b, c] \subset f([b, c])$ donc f admet un point fixe dans $[b, c]$. Soit maintenant $k \geq 2$ fixé. Il existe un intervalle fermé $I_{k-1} \subset [b, c]$ tel que $f(I_{k-1}) = [a, b]$. Puis, pour tout $1 \leq p \leq k - 2$, on construit par récurrence des intervalles fermés $I_p \subset [b, c]$ tels que $f(I_p) = I_{p+1}$. Enfin, il existe un intervalle fermé $I_0 \subset [a, b]$ tel que $f(I_0) = I_1$. La fonction f^k vérifie $f^k(I_0) = [a, b]$ et par valeurs intermédiaires, il existe un point fixe de f^k dans I_0 . Par construction, ce point est périodique de période k pour f . \square